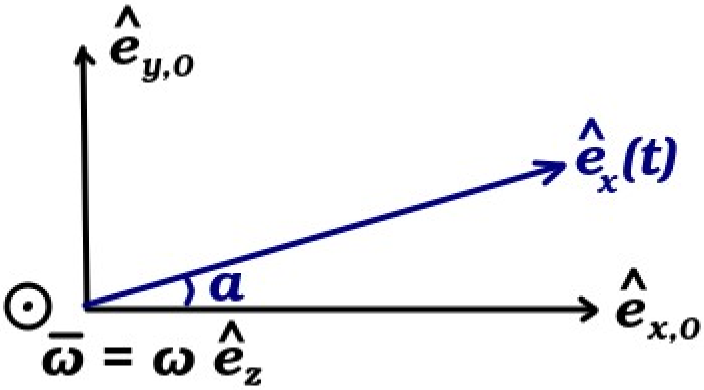
Dynamiczne równanie ruchu

w nieinercjalnym układzie odniesienia

1. Obracający się układ



Rozważmy układ kartezjański z bazą $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, który obraca się o kąt α (dowolnie duży przy stałej prędkości kątowej, zaś mały – a w granicy infinitezymalny – w przypadku zmiennej prędkości kątowej) z osią przechodzącą przez punkt O układu współrzędnych. Wektor prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ jest skierowany pionowo w górę (tzn., obrót następuje w płaszczyźnie rysunku, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Wówczas, po czasie *t* (lub po infinitezymalnym przyroście czasu *dt*, w przedziale którego prędkość kątową możemy uważać za stałą) współrzędne dowolnego wersora bazy podlegającego obrotowi – tu, dla ustalenia uwagi, z indeksem *x* – wyniosą

$$\hat{e}_x(t) \;=\; \cos\alpha\,\hat{e}_x + \sin\alpha\,\hat{e}_y \;\equiv\; [\hat{e}_x(t)]_x\,\hat{e}_x + [\hat{e}_x(t)]_y\,e_y \quad .$$

Pisząc wersory bez zależności od czasu, mamy na myśli te nieruchome, stałe wersory bazowe (na obrazku wyróżnione indeksem zero, 0), w układzie których rozpisujemy wszystkie pozostałe wektory. W chwili *t=0* wersory obracające się pokrywały się z bazowymi.

Pytając o szybkość zmian wersora w czasie, odpowiedź znajdziemy, różniczkując powyższe wyrażenie:

$$\frac{d\hat{e}_x}{dt} \;=\; -\sin\alpha\,\dot{\alpha}\,\hat{e}_x \;+\; \cos\alpha\,\dot{\alpha}\,\hat{e}_y \;\equiv\; -[\hat{e}_x(t)]_y\,\dot{\alpha}\,\hat{e}_x \;+ [\hat{e}_x(t)]_x\,\dot{\alpha}\,\hat{e}_y \quad .$$

Ale skoro $\vec{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}$, zaś $\hat{e}_x(t) = \begin{bmatrix} [\hat{e}_x(t)]_x \\ [\hat{e}_x(t)]_y \\ 0 \end{bmatrix}$, to widzimy, że w każdej chwili *t* prawdą jest równość

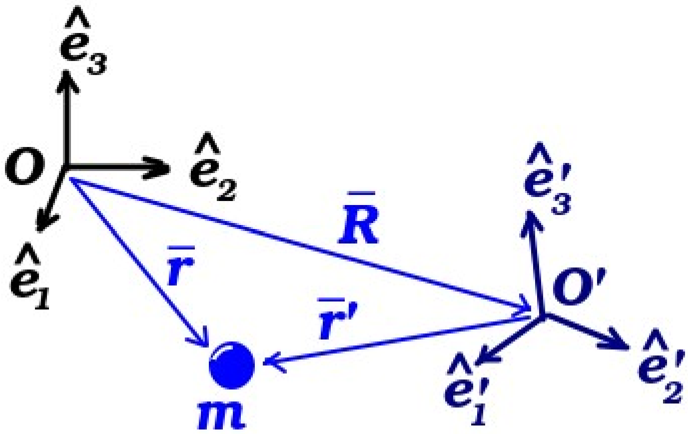
$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} \;=\; \vec{\omega} \times \hat{e}_i(t) \quad .$$

W powyższej tożsamości użyliśmy ogólnego indeksu i, bowiem każdy z wersorów (o dowolnych wartościach jego współrzędnych) podlega tej samej zależności – a zatem, także ich dowolne kombinacje liniowe. Stąd, obliczenie dla dowolnych par wektorów $\vec{\omega}$ oraz $\hat{e}$ doprowadziłoby do tego samego wyniku. Tożsamość korzysta z bieżącej wartości i kierunku $\vec{\omega}$ w danym momencie t (albo stałej). Co oczywiste, ale warte podkreślenia, translacje (przesunięcia równoległe) wersorów bazy nie wprowadzą żadnej zmiany w bazie, cała zmiana pochodzi od ruchu obrotowego układu współrzędnych.

Uzbrojeni w tę wiedzę i tożsamość, możemy przystąpić do zasadniczego zagadnienia:

2. Postać dynamicznego równania ruchu Newtona w układzie nieinercjalnym

Następujące oznaczenia wprowadźmy dla inercjalnego, nieruchomego układu współrzędnych oraz dla drugiego, nieinercjalnego, poruszającego się i obracającego względem niego, a oznaczonego primem ’ :



Układ współrzędnych prim porusza się z niezerową i na ogół zmienną prędkością liniową $\frac{d\vec{R}}{dt} \equiv \vec{V} \neq 0$ oraz kątową $\frac{d\alpha}{dt}\hat{\alpha} \equiv \vec{\omega} \neq 0$ ($\hat{\alpha}$ oznacza kierunek normalny do chwilowej płaszczyzny rotacji) oraz niezerowym (i zmiennym) przyspieszeniem: liniowym $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \equiv \vec{A} \neq 0$ oraz kątowym $\frac{d^2\vec{\alpha}}{dt^2} \equiv \vec{\epsilon} \neq 0$. Chcemy znaleźć explicité postać dynamicznego równania ruchu dla układu prim,

$$\vec{F}\,' = m\,\vec{a}\,' \equiv m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} \quad .$$

Widzimy, że $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R} = \sum_i r'_i \hat{e}'_i + \vec{R}$. Wobec tego

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{r}\,' + \frac{d}{dt}\vec{R} = \underbrace{\sum_i \frac{dr'_i}{dt}\hat{e}'_i}_{\vec{v}\,'} + \sum_i r'_i \underbrace{\frac{d\hat{e}'_i}{dt}}_{=\vec{\omega}\times\hat{e}'_i} + \vec{V}$$
$$= \vec{v}\,' + \vec{V} + \vec{\omega}\times\sum_i r'_i\hat{e}'_i = \vec{v}\,' + \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' \; .$$

Wykorzystaliśmy tu tożsamość z punktu 1.

Pamiętając – tak samo, jak w ostatnim kroku w przypadku wektora $\vec{r}\,'$ – o tym, że zarówno współrzędne, jak i wersory każdego wektora w bazie prim będą się różniczkować po czasie, obliczamy przyspieszenie przez zróżniczkowanie obu stron równości:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + \vec{A} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}\,'}{dt}$$
$$= \sum_i \frac{dv'_i}{dt}\hat{e}'_i + \sum_i v'_i \underbrace{\frac{d\hat{e}'_i}{dt}}_{=\vec{\omega}\times\hat{e}'_i} + \vec{A} + \vec{\epsilon}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\Big[\sum_i \frac{dr'_i}{dt}\hat{e}'_i + \sum_i r'_i \underbrace{\frac{d\hat{e}'_i}{dt}}_{=\vec{\omega}\times\hat{e}'_i}\Big]$$
$$= \vec{a}\,' + \vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{A} + \vec{\epsilon}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$
$$= \vec{a}\,' + \vec{A} + \vec{\epsilon}\times\vec{r}\,' + 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,' + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\,' \; .$$

Stąd, ostatecznie, otrzymujemy żądaną formułę

$$\vec{F}\,' = m\,\vec{a}\,' = \underbrace{\vec{F}}_{=\,m\,\vec{a}} - \underbrace{m\,\vec{A}}_{\text{unoszenia}} - \underbrace{m\,\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,'}_{\text{przysp.kątowego}} - \underbrace{2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}\,'}_{\text{Coriolisa}} - \underbrace{m\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\,'}_{\text{odśrodkowa}} \; .$$

Zauważmy, że nawet przy nieobecności przyspieszeń: unoszenia i obrotowego, w układzie prim nadal występują dwie siły bezwładności – siły pozorne: Coriolisa i odśrodkowa. Zostały one dokładniej opisane w innym artykule autora, *Prędkość i przyspieszenie we współrzędnych biegunowych*.

Obowiązkowym ćwiczeniem Czytelnika jest porównanie obu formuł – w tym oraz w wymienionym artykule – i wizualne sprawdzenie ich identyczności.

Autor: Marek Pietrachowicz.